Противофазные ультракороткие солитоны в многосердцевинных волокнах

А.А. Балакин, С.А. Скобелев, А.В. Андрианов, Е.А. Анашкина, А.Г. Литвак

Институт прикладной физики РАН

Сессия по нелинейной динамике, 2021

Квазимонохроматический предел

Исходный Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \iint \left[\frac{U^* \partial_z U - U \partial_z U^*}{2\mathrm{i}} - \epsilon |U|^2 - \frac{1}{2}|U|^4 \right] dz\, d\boldsymbol{x}.$$

Для волнового пучка $U = \sum u_n f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)$, мы получаем

$$\mathcal{L} \approx \sum \int \left[\frac{u_n^* \partial_z u_n - u_n \partial_z u_n^*}{2\mathrm{i}} - u_{n+1} u_n^* - u_{n+1}^* u_n - \frac{1}{2}|u_n|^4 \right] dz.$$

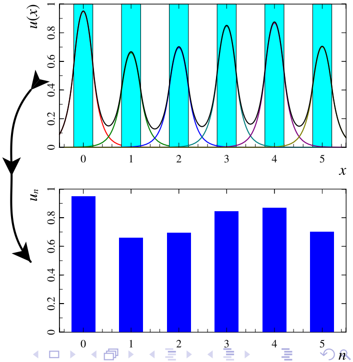
Уравнения для амплитуд полей в сердцевинах

$$\mathrm{i}\partial_z u_n = u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n.$$

Интеграл задачи

$$P = \sum |u_n|^2 = \mathrm{const}.$$

ВОПРОС: как обобщить на случай предельно коротких импульсов?



Предельно короткие импульсы

Стартуем с волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \mathcal{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(x,y,\omega)\mathcal{E}(t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}d\omega dt' = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{nl}}{\partial t^2}.$$

В линейном пределе, вдали от резонансов можно положить

$$\varepsilon(x,y,\omega) \approx \varepsilon_0(x,y) - \frac{\omega_D^2(x,y)}{\omega^2} + b(x,y)\omega^2.$$

Волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \mathcal{E} - \frac{\varepsilon_0(x,y)}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_D^2(x,y)}{c^2}\mathcal{E} + \frac{b(x,y)}{c^2}\frac{\partial^4 \mathcal{E}}{\partial t^4} = 0,$$

а его действие равно

$$S = \iiiint \left[\frac{\varepsilon_0(x,y)}{c^2}\left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right|^2 - \frac{\omega_D^2(x,y)}{c^2}|\mathcal{E}|^2 + \frac{b(x,y)}{c^2}\left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}\right|^2 - \left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}\right|^2 - |\nabla_\perp \mathcal{E}|^2\right] dx dy dz dt.$$

Вариационное приближение

Если каждая сердцевина одномодовая, то решение удобно искать в виде

$$\mathcal{E}(z,t,x,y) \approx \sum_n \mathcal{A}_n(z,t)\phi(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}_n) \quad \text{при} \quad \zeta = \frac{\iint \phi\phi_+ dxdy}{\iint \phi^2 dxdy} \ll 1.$$

Укороченное действие принимает вид ($\phi = \phi(\boldsymbol{r})$, $\phi_+ = \phi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{L})$)

$$S = \sum_n \iint \Bigg[\left|\frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial t}\right|^2 \underbrace{\iint \frac{\varepsilon_0(x,y)}{c^2}\phi^2 dxdy}_{\beta} + \left(\frac{\partial \mathcal{A}_n^*}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{A}_{n+1}}{\partial t} + c.c.\right) \underbrace{\iint \frac{\varepsilon_0(x,y)}{c^2}\phi\phi_+ dxdy}_{\beta_1} -$$

$$-|\mathcal{A}_n|^2 \underbrace{\iint \left(\frac{\omega_D^2(x,y)}{c^2}\phi^2 + (\nabla_\perp \phi)^2\right) dxdy}_{\sigma} - (\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_{n+1} + c.c.) \underbrace{\iint \left(\frac{\omega_D^2(x,y)}{c^2}\phi\phi_+ + \nabla_\perp\phi\nabla_\perp\phi_+\right) dxdy}_{-X} +$$

$$+ \left|\frac{\partial^2 \mathcal{A}_n}{\partial t^2}\right|^2 \underbrace{\iint \frac{b(x,y)}{c^2}\phi^2 dxdy}_{\gamma} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{A}_n^*}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}_{n+1}}{\partial t^2} + c.c.\right) \underbrace{\iint \frac{b(x,y)}{c^2}\phi\phi_+ dxdy}_{\gamma_1} -$$

$$- \left|\frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial z}\right|^2 \underbrace{\iint \phi^2 dxdy}_{\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{A}_n^*}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{A}_{n+1}}{\partial z} + c.c.\right) \underbrace{\iint \phi\phi_+ dxdy}_{\alpha_1} \Bigg] dtdz.$$

Укороченное уравнение

В существующих MCF обычно $\alpha_1 \approx \zeta\alpha$, $\beta_1 \approx \zeta\beta$, $\gamma_1 \approx \zeta\gamma$.

После варьирования получаем укороченное уравнение

$$\left(\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)\left[\mathcal{A}_n + \zeta\mathcal{A}_{n-1} + \zeta\mathcal{A}_{n+1}\right] + \sigma\mathcal{A}_n - X(\mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{A}_{n+1}) = 0.$$

В сопровождающей системе координат $\tau = t \mp z/V$, $V = \sqrt{\alpha/\beta}$ получаем

$$\frac{\partial^2\mathcal{A}_n}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial^2\mathcal{A}_n}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial z}\right]\mathcal{A}_n \approx \pm 2V\frac{\partial^2\mathcal{A}_n}{\partial z\partial\tau}, \qquad \left|\frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial z}\right| \ll \frac{1}{V}\left|\frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial\tau}\right|.$$

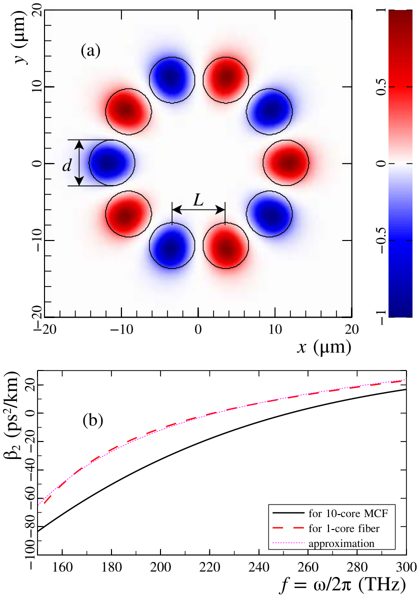
Вводя $u_n = \mathcal{A}_n + \zeta\mathcal{A}_{n+1} + \zeta\mathcal{A}_{n-1}$ приходим к укороченному уравнению

$$\boxed{2\sqrt{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_n}{\partial z\partial\tau} + \sigma u_n - (X + \sigma\zeta)(u_{n+1} + u_{n-1}) - \gamma\frac{\partial^4 u_n}{\partial\tau^4} = 0.}$$

Дисперсионные зависимости

Прямой расчет дисперсионной кривой противофазной моды $u_n \propto (-1)^n$ показал хорошее согласие с аналитическими формулами.

На рисунке распределение поля $\mathcal{E}_x$ для MCF с расположенными по кольцу сердцевинами диаметра $d = 6$ мкм и расстоянием $L = 7$ мкм. Найденные дисперсионные зависимости и аппроксимация для одной сердцевины и 10 сердцевин.



Укороченное уравнение

В численном моделировании рассматривался нелинейный отклик среды

$$\mathcal{P}_{\text{nl, n}} = n_2(1-f_R)|\mathcal{A}_n|^2\mathcal{A}_n + n_2 f_R \mathcal{A}_n \int\limits_0^\infty |\mathcal{A}_n(\tau-\tau')|^2 h_R(\tau')d\tau',$$

включающий нестационарность нелинейности, описываемую функцией

$$h_R(\tau) = \frac{\tau_1^2+\tau_2^2}{\tau_1\tau_2^2}\exp(-\tau/\tau_2)\sin(\tau/\tau_1).$$

Поскольку нелинейность имеет порядок остальных членов, то вклад нелинейного отклика соседних сердцевин мал и можно получить

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial z \partial \tau} + u_n - \chi(u_{n-1}+u_{n+1}) - \mu\frac{\partial^4 u_n}{\partial \tau^4} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left[(1-f_R)|u_n|^2 u_n + f_R u_n \int_0^\infty |u_n(\tau-\tau')|^2 h_R(\tau')d\tau'\right] = 0.$$

Предельно короткие солитоны

Будем искать противофазное решение $u_n(z,\tau) = (-1)^n u_\pm(z,\tau)$ в пренебрежении высокочастотной дисперсией ($\mu = 0$) и нестационарностью ($f_R = 0$). Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_\pm}{\partial z \partial \tau} + (1+2\chi)u_\pm + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(|u_\pm|^2 u_\pm\right) = 0,$$

сохраняющий ряд интегралов

$$W_\pm = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u_\pm|^2 d\tau, \quad H_\pm = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|u_\pm|^4 - (1+2\chi)\left|\int_{-\infty}^{\tau} u_\pm d\eta\right|^2\right] d\tau, \quad \ldots$$

и имеющий солитонное решение

$$u_\pm(z,\tau) = \sqrt{v_s}G(\xi)\exp[i\omega_s(\tau + v_s z) + i\varphi(\xi)],$$

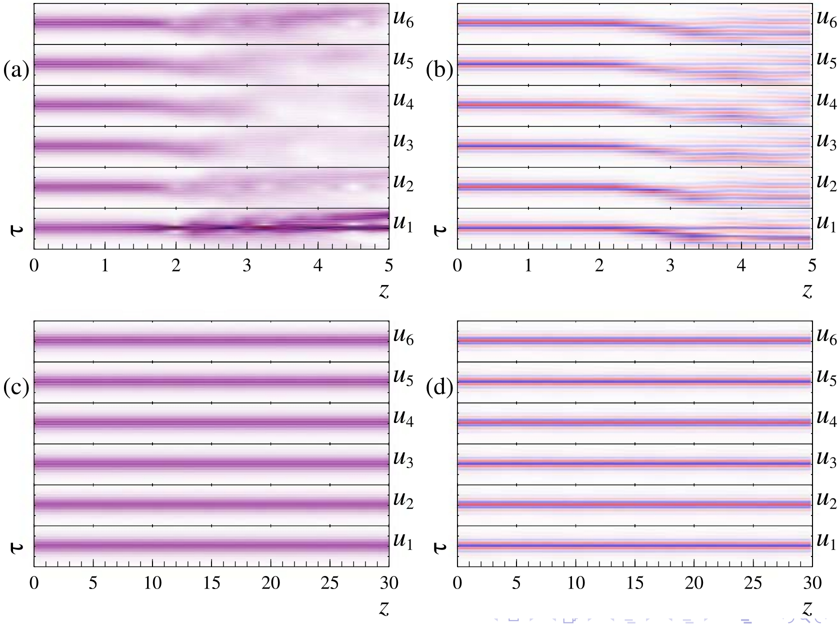
$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{G^2(3-2G^2)}{2(1-G^2)^2}, \quad \int_{G_m}^{G} \frac{1-3G^2}{G\sqrt{\delta^2 - F(G^2)}}dG = \pm(\xi - \xi_0), \quad \delta^2 = \frac{1+2\chi}{\omega_s^2 v_s} - 1 \le \frac{1}{8},$$

$$F(G^2) = G^2\left[3/2(1+\delta^2) - (4-5G^2)/4(1-G^2)^2\right].$$

Устойчивость солитонов

Численное моделирование показало неустойчивость при малых χ:
(a) $\delta = 0.05$, $\chi = 0.002$,
(b) $\delta = 0.3$, $\chi = 0.2$,
(c) $\delta = 0.05$, $\chi = 0.008$,
(d) $\delta = 0.3$, $\chi = 0.3$.

Начальный уровень шума is 10^{-2}.



Устойчивость солитонов

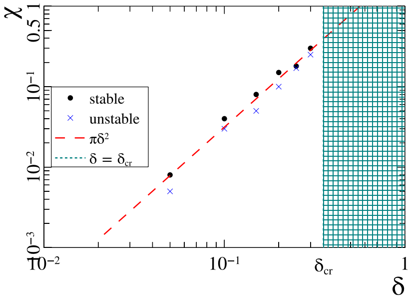
Причина в зависимости скорости солитонов $v_s \propto \delta^2$ от их амплитуды:

$$u_n^{\mathrm{sol}} \approx \frac{(-1)^n}{\omega_s\sqrt{1+\delta^2}} \frac{2\delta\sqrt{1+2\chi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{1+\sqrt{1+12\delta^2}\cosh(2\delta\xi)}} + O(\delta^6),$$

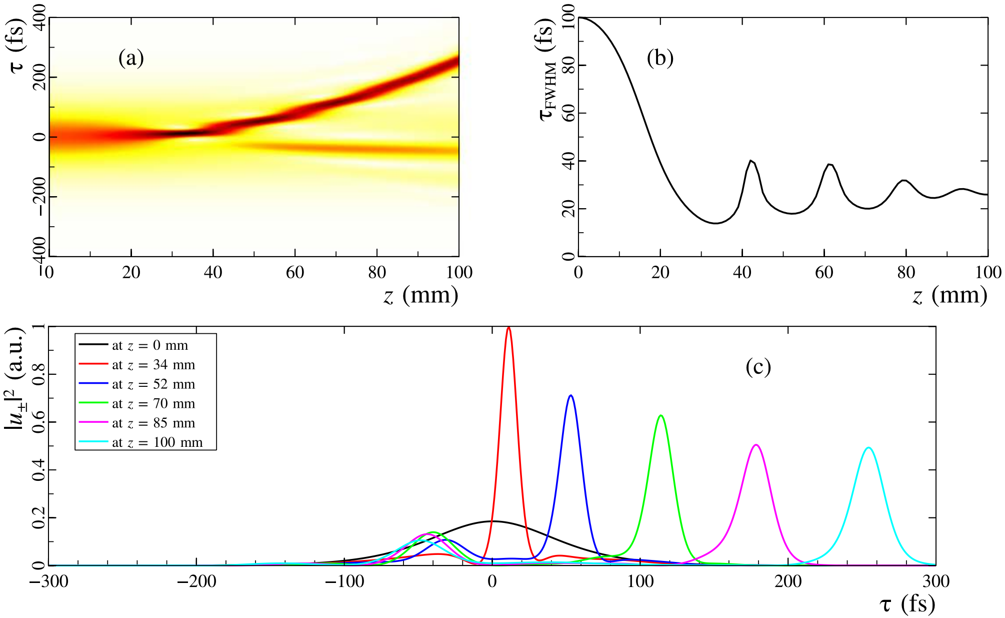
$$\theta = \xi + \frac{2\omega_s z}{v_s} + \frac{3}{2}\int |u_n^{\mathrm{sol}}|^2 d\xi + \varphi_0, \qquad v_s = \frac{\omega_s^2(1+\delta^2)}{1+2\chi}.$$

Если длина связи $2\pi/\chi$ будет больше дисперсионной длины $2\omega_s/\delta^2$, то солитоны могут «разбежаться». Это дает условие устойчивости

$$\boxed{\chi > \chi_{\mathrm{cr}} \equiv \frac{\pi\delta^2}{\omega_s}.}$$



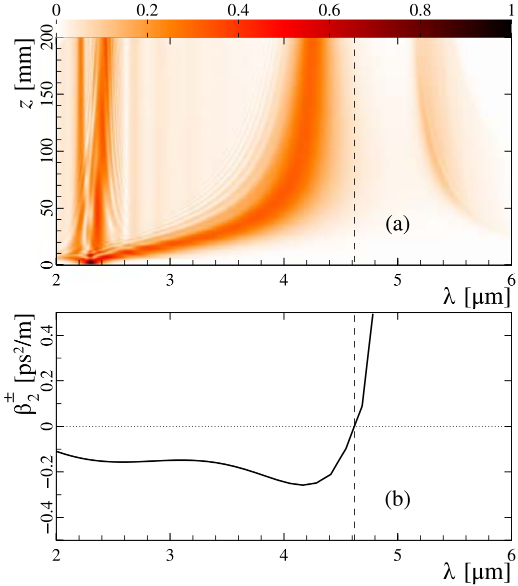
Компрессия при мультисолитонной динамике



Получение ИК импульсов (до 4-5 мкм)

Эволюция спектральной амплитуды противофазного лазерного импульса. Начальный импульс с энергией 1.5 нДж и длительностью 100 фс на длине волны 2.3 мкм.

Зависимость дисперсии групповой скорости от длины волны для 10-ядерного MCF с диаметром сердцевин $d = 2.1$ мкм и расстоянием между центрами $L = 4.2$ мкм.



Выводы

Получено уравнение для анализа самовоздействия волнового поля с произвольным числом колебаний поля в многосердцевидных волокнах (MCF). Найден и проанализирован новый класс устойчивых противофазных пространственно-временных солитонных структур с малым числом колебаний поля в MCF, в котором ядра расположены по кольцу. Определена граница устойчивости полученных решений. В качестве примера использования таких солитонов была рассмотрена задача их самокомпрессии в процессе многосолитонной динамики для эффективного укорочения лазерных импульсов до длительности в несколько колебаний поля в MCF. Численно показано формирование лазерных импульсов с длительностью несколько периодов с энергией в десятки наноджоулей на выходе десяти-ядерного MCF.

Публикации:

1. A.A. Balakin, S.A. Skobelev, A.V. Andrianov, E.A. Anashkina, A.G. Litvak, *Out-of-phase few-cycle solitons in multicore fibers*. PRA **104**, 023522 (2021).
2. A.A. Balakin, S.A. Skobelev, E.A. Anashkina, A.V. Andrianov, A.G. Litvak, *Ultrawide shifting of the laser pulse wavelength in a multicore tellurite fiber with two zero-dispersion wavelengths* PRA **104**, 033518 (2021).